7. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Použijeme větu 24 (Lagrangeova věta o multiplikátoru) - ta nám dá body podezřelé z extrémů (pro funkci f na množině M). Zadefinujme funkci $g(x,y) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Pak $M = [g = 0]$.

Spočtěme parciální derivace g a vyjádřeme ∇g.

$$\begin{aligned} g'_x(x,y,z) &= 2x \\ g'_y(x,y,z) &= 2y \\ g'_z(x,y,z) &= 2z \\ \nabla g(x,y,z) &= (2x, 2y, 2z) \end{aligned}$$

Platí následující.

$$\nabla g = 0 \iff 2x = 2y = 2z = 0 \iff x = y = z = 0 \iff [x,y,z] = [0,0,0]$$

Jelikož jediný bod, ve kterém má g nulový gradient, se nachází mimo M ($[0,0,0] \notin M$), tak z podmínky *(I)* neodstáváme žádné body podezřelé z extrémů. Vyšetřeme nyní podmínku *(II)*.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= 1 \\ f'_y(x,y,z) &= -2 \\ f'_z(x,y,z) &= 2 \\ \nabla f(x,y,z) &= (1, -2, 2) \end{aligned}$$

Pak rovnost $\nabla f(x,y,z) + \lambda \nabla g(x,y,z) = 0$ nám dává následující soustavu.

$$\begin{aligned} 1 + \lambda 2x &= 0 \\ -2 + \lambda 2y &= 0 \\ 2 + \lambda 2z &= 0 \end{aligned}$$

Vyjádřením λ dostáváme následující sadu podmínek (všimněme si, že pokud by x, y nebo z bylo nulové, pak by příslušná rovnice nemohla být splněna, tedy BÚNO $x, y, z \neq 0$).

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-1}{2x} \\ \lambda &= \frac{2}{2y} = \frac{1}{y} \\ \lambda &= \frac{-2}{2z} = \frac{-1}{z} \\ \lambda &= \frac{-1}{2x} = \frac{1}{y} = \frac{-1}{z} \\ \frac{1}{y} &= \frac{-1}{z} \implies y = -z \\ \frac{-1}{2x} &= \frac{-1}{z} \implies \frac{z}{2} = x \end{aligned}$$

Společně s tím, že bod podezřelý z extrému by měl být prvkem množiny M dostávme následující soustavu.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ y &= -z \\ x &= \frac{z}{2} \end{aligned}$$

Dosazením posledních dvou rovnic do první dostáváme:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + (-z)^2 + z^2 &= 1 \\ \frac{z^2}{4} + 2z^2 &= 1 \\ z^2 \cdot \frac{9}{4} &= 1 \\ z^2 = \frac{4}{9}, \quad z &= \pm\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Podezřelými body z extrémů tedy jsou (pomocí z získáme x, y): $\left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$.

Dle věty 12 lze snadno ukázat, že M je kompaktní a z věty 14 plyne, že f nabývá na M extrémů. Z věty 24 jsme dostali jediné dva body podezřelé z maxima. Vyšetřeme funkční hodnoty f v těchto bodech.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) &= \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = 3 \\ f\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) &= \frac{-1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -3 \end{aligned}$$

Dostáváme, že f nabývá maxima 3 na mn. M v $\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ a minima -3 v $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$.

Příklad 1 (b) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$

Použijeme větu 24. Použijeme větu 25. Zadefinujme $g_1(x, y, z) := x^2+y^2+z^2-1, g_2(x, y, z) := x+y+z$. Pak $M = [g_1 = 0, g_2 = 0]$. Pak platí:

$$\begin{aligned} (g_1)'_x(x, y, z) &= 2x \\ (g_1)'_y(x, y, z) &= 2y \\ (g_1)'_z(x, y, z) &= 2z \\ \nabla g_1(x, y, z) &= (2x, 2y, 2z) \\ (g_2)'_x(x, y, z) &= 1 \\ (g_2)'_y(x, y, z) &= 1 \\ (g_2)'_z(x, y, z) &= 1 \\ \nabla g_2(x, y, z) &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

Platí následující.

$$\nabla g_1 = k \cdot \nabla g_2 \iff 2x = 2y = 2z = k \iff x = y = z = \frac{k}{2}$$

Pokud by existoval bod $[x, y, z] \in M$ a $k \in \mathbb{R}$ takové, že $\nabla g_1 = k \cdot \nabla g_2$, pak by muselo platit, že $k = 0 = x = y = z$ (z podmínky $g_2 = 0$ na M). To je ale v rozporu s tím, že $g_1 = 0$. Odsud tedy nedostáváme žádný podezřelý bod.

K vyšetření podmínky *(II)* spočtěme parciální derivace f.

$$\begin{aligned} f'_x(x, y, z) &= 1 \\ f'_y(x, y, z) &= -2 \\ f'_z(x, y, z) &= 2 \\ \nabla f(x, y, z) &= (1, -2, 2) \end{aligned}$$

Rovnice $\nabla f + \alpha \nabla g_1 + \beta \nabla g_2 = 0$ a $g_1 = 0 = g_2$ dává následující soustavu.

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha x + \beta &= 0 \\ -2 + 2\alpha y + \beta &= 0 \\ 2 + 2\alpha z + \beta &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Z prvních tří rovnic dostáváme $-\beta = 1 + 2\alpha x = -2 + 2\alpha y = 2 + 2\alpha z$. Z toho plyne následující.

$$\begin{aligned} 2\alpha(x - y) &= -3 \\ 2\alpha(y - z) &= 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovností speciálně plyne, že $\alpha, x - y, y - z \neq 0$ (neb součin není roven nule, tedy ani činitelé nemohou být rovny nule). Můžeme tedy první dvě rovnosti podělit, čímž dostaneme:$2\alpha = \frac{-3}{x-y} = \frac{4}{y-z}$. Z toho přenásobením jmenovateli dostáváme, že $-3y + 3z = 4x - 4y$. Máme tedy soustavu:

$$\begin{aligned} y &= 4x - 3z \\ x + y + z = 0 &\implies x = -y - z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

První dvě rovnosti dávají $y = -4y - 4z - 3z \implies -7z = 5y \implies z = -\frac{5}{7}y$.

Z toho dále plyne, že $x = -y - z = -y + \frac{5}{7}y = -\frac{2}{7}y$. Dosadíme do poslední rovnice a dostáváme následující.

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{7}y\right)^2 + y^2 + \left(-\frac{5}{7}y\right)^2 &= 1 \\ \frac{4}{49}y^2 + y^2 + \frac{25}{49}y^2 &= 1 \\ \frac{78}{49}y^2 &= 1 \\ y^2 &= \frac{49}{78} \end{aligned}$$

Celkově podezřelými body jsou: $\left[-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}\right], \left[\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}\right]$.

Dle věty 12 lze snadno ukázat, že M je kompaktní a z věty 14 plyne, že f nabývá na M extrémů. Z věty 24 jsme dostali jediné dva body podezřelé z maxima. Vyšetřeme funkční hodnoty f v těchto bodech.

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}\right) = \frac{-2-14-10}{\sqrt{78}} = \frac{-26}{\sqrt{78}}$$
$$f\left(\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}\right) = \frac{26}{\sqrt{78}}$$

Maximum: $\frac{26}{\sqrt{78}}$ v $\left[\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}\right]$, minimum: $\frac{-26}{\sqrt{78}}$ v $\left[-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}\right]$.

Příklad 1 (c) $f(x,y,z) = xyz$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq 1, x+y+z \geq 0\}$
Zřejmě $\operatorname{Int} M \neq \emptyset$. Proto vyšetříme funkci f na $\operatorname{Int} M$ a pak na $H(M)$.
K vyšetření extrémů na $\operatorname{Int} M$ použijeme větu 16.

$$f'_x(x,y,z) = yz$$
$$f'_y(x,y,z) = xz$$
$$f'_z(x,y,z) = xy$$

Dle věty 16 dostáváme, že bod $[0,0,0] \in M$ je bodem podezřelým z extrému.
Nyní vyšetřeme chování f na hranici. Zadefinujme

$$g_1(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1, \quad g_2(x,y,z) := x+y+z.$$

Z definice hranice lze ukázat, že $H(M) = ([g_1 = 0] \cap M) \cup ([g_2 = 0] \cap M) = [g_1 = 0, g_2 \geq 0] \cup [g_2 = 0, g_1 \leq 0] = [g_1 = 0, g_2 > 0] \cup [g_2 = 0 = g_1] \cup [g_2 = 0, g_1 < 0]$. Vyšetřeme tedy chování funkce f na všech třech množinách v posledn rovnosti - použijeme věty 24, 25. Spočtěme nejdříve parciální derivace funkcí g_1, g_2.

Poznámka: je třeba to takto rozdělit, neb větu 24 lze použít jen pro G otevřenou. Nelze tedy zkoumat $[g_1 = 0, g_2 \geq 0]$ pomocí věty 24, ale pouze množinu $[g_1 = 0, g_2 > 0]$.

$$(g_1)'_x(x,y,z) = 2x, \qquad (g_2)'_x(x,y,z) = 1$$
$$(g_1)'_y(x,y,z) = 2y, \qquad (g_2)'_x(x,y,z) = 1$$
$$(g_1)'_z(x,y,z) = 2z, \qquad (g_2)'_z(x,y,z) = 1$$

• $[g_1 = 0, g_2 > 0]$ Použijeme větu 24 na množinu $\{x \in [g_2 > 0] \colon g_1(x) = 0\}$ (G ze znění věty je tedy ot. mn. $[g_2 > 0]$).
(I):

$$\nabla g_1 = 0 \iff [x,y,z] = [0,0,0]$$

Počátek nesplňuje podmínku $g_1 = 0$, nedostáváme tedy podezřelý bod.
(II):
Rovnice $\nabla f + \lambda \nabla g_1 = 0$ společně s $g_1 = 0$ a $x+y+z \geq 0$ dává následující soustavu.

$$
\begin{aligned}
yz + 2\lambda x &= 0\\
xz + 2\lambda y &= 0\\
xy + 2\lambda z &= 0\\
x^2 + y^2 + z^2 &= 1\\
x + y + z &> 0
\end{aligned}
$$

První tři rovnice dávají: $2\lambda x = -yz, 2\lambda y = -xz, 2\lambda z = -xy$. Je-li $\lambda = 0$, pak musí alespoň dvě z x, y, z být nulové. Z podmínky $g_2 > 0$, pak dostáváme, že zbylá musí být kladná. Podmínka $g_1 = 0$ pak dává, že zbylá proměnná musí být rovna jendé. Dostáváme tedy body $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]$.

Předpokládejme nyní, že $\lambda \neq 0$. Pak je-li jedna z proměnných x, y, z nulová, musí být všechny nulové (neb $2\lambda x = -yz, 2\lambda y = -xz, 2\lambda z = -xy$). Můžeme tedy předpokládat, že $x, y, z \neq 0$. Ze zmíněných rovností pak dostáváme následující.

$$
\begin{aligned}
&\lambda = \frac{-yz}{2x} = \frac{-xz}{2y} = \frac{-xy}{2z} \implies x = \pm y, \quad z = \pm y\\
&x^2 + y^2 + z^2 = 1 \implies y^2 = \frac{1}{3}\\
&x + y + z \geq 0 \implies \text{ podezřelé body jsou: } \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right]
\end{aligned}
$$

Podezřelými body z této části hranice jsou:

$$
[0,0,0], [1,0,0], [0,1,0], [0,0,1], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right].
$$

- $[g_2 = 0, g_1 < 0]$ věta 24 pro $G = [g_1 < 0]$
  (I): $\nabla g_1 \neq 0 \implies$ žádné podezřelé body.
  (II)

Rovnice $\nabla f + \lambda \nabla g_2 = 0$ spolu s $[x, y, z] \in [g_2 = 0, g_1 < 0]$ dává následující.

$$
\begin{aligned}
yz + \lambda &= 0\\
xz + \lambda &= 0\\
xy + \lambda &= 0\\
x + y + z &= 0\\
x^2 + y^2 + z^2 &< 1
\end{aligned}
$$

První tři rovnice, podobně jako výše, dávají, že alespoň dvě z proměnných x, y, z jsou nulové. Podmínka $x + y + z = 0$ pak dává, že nutně $x = y = z = 0$. Počátek je již zahrnut v podezřelých bodech.

Nedostali jsme tedy žádné nové podezřelé body.

- $[g_1 = 0 = g_2]$ Použijeme větu 25.
  (I):

$$
\nabla g_1 = k \cdot \nabla g_2 \implies k = 2x = 2y = 2z \implies x = y = z
$$

Zároveň chceme, aby $g_2(x, y, z) = 0$, z čehož plyne, že $x = y = z = 0$ a počátek již máme zahrnut v podezřelých bodech.

(II):
Rovnost $\nabla f + \alpha\nabla g_1 + \beta\nabla g_2 = 0$ společně s $g_1 = 0 = g_2$ dostáváme nsáledující soustavu.

$$\begin{aligned} yz + 2\alpha x + \beta &= 0 \\ xz + 2\alpha y + \beta &= 0 \\ xy + 2\alpha z + \beta &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

První tři rovnosti dávají: $-\beta = yz + 2\alpha x = xz + 2\alpha y = xy + 2\alpha z$, což dává:

$$\begin{aligned} 2\alpha(x - y) &= z(x - y) \\ 2\alpha(y - z) &= x(y - z) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Pokud $x - y = 0$, pak dostáváme z $x + y + z = 0$, že $z = -2x$. Dosadíme do předposlední rovnice a dostaneme:

$$2x^2 + (-2x)^2 = 1 \implies 6x^2 = 1 \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Podezřelé body: $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right]$

Pokud $x - y \neq 0$, budeme uvažovat dvě situace: $y - z = 0$ $y - z \neq 0$. Obě situace dopadnou velmi analogicky a dostaneme následující body: $\left[\mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$

Celkově podezřelými body jsou:

$$[0,0,0], [1,0,0], [0,1,0], [0,0,1], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right],$$
$$\left[\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[\mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right].$$

Dle věty 12 lze snadno ukázat, že M je kompaktní a z věty 14 plyne, že f nabývá na M extrémů. Vyšetřeme hodnoty f v podezřelých bodech.

$$\begin{aligned} &f(0,0,0) = f(1,0,0) = f(0,1,0) = f(0,0,1) = 0 \\ &f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ &f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \\ &f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = f\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{6}} \\ &f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Maximum: $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, minimum: $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Příklad 1 (d) $f(x,y,z) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x+y+z = \frac{\pi}{2}, x>0, y>0, z>0\}$

Použijeme větu 24. Zadefinujme $g(x,y,z) := x+y+z-\frac{\pi}{2}, G := [x>0, y>0, z>0]$. Pak $M = \{x \in G\colon g(x) = 0\}$ a G je otevřená (víme z teorie ze 2. cvičení).

$$g'_x(x,y,z) = 1$$
$$g'_y(x,y,z) = 1$$
$$g'_z(x,y,z) = 1$$

Platí : $\nabla g \neq 0$. Podmínka *(I)* nám tedy nedává žádné body podezřelé z extrému.

K vyšetření podmínky *(II)* spočtěme parciální derivace f.

$$f'_x(x,y,z) = \cos x \cdot \sin y \cdot \sin z$$
$$f'_y(x,y,z) = \sin x \cdot \cos y \cdot \sin z$$
$$f'_z(x,y,z) = \sin x \cdot \sin y \cdot \cos z$$

Rovnice $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ dává následující soustavu.

$$\cos x \cdot \sin y \cdot \sin z + \lambda = 0$$
$$\sin x \cdot \cos y \cdot \sin z + \lambda = 0$$
$$\sin x \cdot \sin y \cdot \cos z + \lambda = 0$$

Jejím vyřešením dostáváme:

$$\cos x \cdot \sin y = \sin x \cdot \cos y$$
$$\cos y \cdot \sin z = \sin y \cdot \cos z$$
$$\cos y \cdot \sin z = \sin x \cdot \cos z$$

Soustavu mimo jiné řeší zřejmě body, pro které $\cos x = \cos y = \cos z = 0$, nebo $\sin x = \sin y = \sin z = 0$. To ale nemůže nastat pro $[x,y,z] \in M$, neb z definice M plyne, že speciálně $x,y,z \in (0, \pi/2]$. Můžeme tedy předpokládat, že veškeré cos a sin v předchozí soustavě jsou nenulové, můžeme jimi tedy dělit.Dostáváme, že $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z$. Tedy $x = y + k\pi = z + l\pi$ pro vhodná $k, l \in \mathbb{Z}$. Vezmeme-li v úvahu, že $x,y,z \in (0, \frac{\pi}{2}]$, dostáváme, že $k = l = 0$. Tedy $[x,y,z] = [a,a,a]$ pro vhodné $a \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Z podmínky $x+y+z = \frac{\pi}{2}$ pak plyne, že $a = \frac{\pi}{6}$.

Celkově podezřelými body jsou: $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$.

$f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{1}{8}$.

Zřejmě množina M je obsažena v množině $M' = \left[g = 0, x, y, z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right]$, která je kompaktní. Z věty 14 vyplývá, že f na M' nabývá extrémů a lze ukázat, že f na M' nabývá maxima v $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$. Z toho dostáváme, že $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ je skutečně bod, ve kterém f nabývá maxima na množině M, neb $\sup_M f \leq \sup_{M'} f$ a f.

Minima se nenabývá, neb jsme neodhalili žádný další bod podezřelý z extrému.

Příklad 1 (e) $f(x,y,z) = xy^2z^3$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x+2y+3z = a, x>0, y>0\}, a>0$

Množina M je polorovinou v $\mathbb{R}^3$ - rovnice $x+2y+3z = a$ určuje rovinu a podmínka $x,y>0$ z ní vysekne jen „půlku“.

Použijeme větu 24. Zadefinujme $g(x,y,z) := x + 2y + 3z - a$. Pak $M = [g = 0] \cap [x > 0, y > 0]$.

$$g'_x(x,y,z) = 1$$
$$g'_y(x,y,z) = 2$$
$$g'_z(x,y,z) = 3$$

Platí následující.

$$\nabla g \neq 0$$

Z podmínky *(I)* nedostáváme žádný podezřelý bod.
K vyšetření podmínky *(II)* spočtěme parciální derivace f. (a je konstanta, čili zderivuje se na 0)

$$f'_x(x,y,z) = y^2z^3$$
$$f'_y(x,y,z) = 2xyz^3$$
$$f'_z(x,y,z) = 3xy^2z^2$$

Rovnice $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ dává následující soustavu.

$$y^2z^3 + \lambda = 0$$
$$2xyz^3 + 2\lambda = 0$$
$$3xy^2z^2 + 3\lambda = 0$$

Pokud by $\lambda = 0$, pak by muselo platit, že $y^2z^3 = 2xyz^3 = 3xy^2z^2 = 0$, z čehož plyne, že by muselo alespoň jedno z x, y, z být rovno 0. Pak by ovšem nešlo o bod množiny M. Naopak, pokud $\lambda \neq 0$, pak nemůže ani jedno z x, y, z být rovno nule a těmito proměnnými můžeme dělit.

Vyřešením soustavy pro $\lambda \neq 0$ dostáváme:

$$-\lambda = y^2z^3 = xyz^3 = xy^2z^2 \implies y = x = z$$

Dosazením do rovnosti $x + 2y + 3z = a$ dostáváme: $6x = a$, tedy $x = \frac{a}{6}$.

Celkově podezřelými body jsou: $\left[\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right]$.

Jelikož nám vyšel jediný podezřelý bod, zbývá nám zjistit, zda jde o minimum, či maximum. Platí, že $f\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right) = \left(\frac{a}{6}\right)^6$.

Jelikož množina $M' := [g = 0] \cap [x \in [\frac{a}{7}, \frac{a}{5}]] \cap [y \in [\frac{a}{7}, \frac{a}{5}]]$ je kompaktní (omezená a uzavřená) a jde o podmnožinu M obsahující bod $\left[\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right]$, lze ukázat, že f v $\left[\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right]$ nabývá lokálního maxima pomocí věty 14 (nabývá tam maxima vzhledem k mn. M'). Ukažme nyní, že jde o maximum na množině M (a nikoli jen o lokální maximum). Zřejmě, aby byla hodnota f velká, musí být $z > 0$. Proto stačí uvažovat jen takové body množiny M, pro které $z > 0$. Jelikož $z = \frac{a-2y-x}{3}$, je třeba, aby $a - 2y - x > 0$, aby bylo z kladné. Tj. je potřeba, aby $x + 2y < a$. Speciálně $x < a, y < \frac{a}{2}$. Stačí tedy zkoumat následující.

$\sup\left\{xy^2z^3 \colon x \in (0,a), y \in \left(0, \frac{a}{2}\right), z = \frac{a-x-2y}{3}\right\} = \sup\{xy^2\frac{1}{27}(a-x-2y)^3 : x \in (0,a), y \in \left(0, \frac{a}{2}\right)\}$.

TODO

Uvědomme si nejdříve, že pokud bychom dosadili krajní hodnoty (tj. vyzkoušeli bychom $x = 0, y = 0, x = a, y = \frac{a}{2}$), dostali bychom, že $f \leq 0$. Supremum tedy nebude v krajních bodech.

Uvažujme nejdříve $y \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$ pevně dané. Zkoumáme tedy $g(x) = xy^2\frac{1}{27}(a-x-2y)^3$ na intervalu $(0,a)$. Funkci g zderivujeme, abychom vyšetřili její extrémy.

$$g'(x) = \frac{y^2}{27}(a-x-2y)^3 - \frac{xy^2}{9}(a-x-2y)^2 = \frac{y^2}{27}(a-x-2y)^2(a-4x-2y)$$

Body podezřelé z extrému pro funkci g jsou $a-x-2y=0 \implies x=a-2y, a-4x-2y=0 \implies x=\frac{a}{4}-\frac{y}{2}$. Platí, že $g(a-2y)=0$ a $g\left(\frac{a}{4}-\frac{y}{2}\right)=\left(\frac{a}{4}-\frac{y}{2}\right)\frac{y^2}{27}\left(\frac{3}{4}a-\frac{3}{2}y\right)^3$.

Zkoumejme nyní maximum funkce $h(y)=\left(\frac{a}{4}-\frac{y}{2}\right)\frac{y^2}{27}\left(\frac{3}{4}a-\frac{3}{2}y\right)^3$ pro $y\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$.

$$h'(y) = \frac{1}{128}y(a-6y)(a-2y)^3.$$

Podezřelým bodem na intervalu $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ je: $y=\frac{a}{6}$. A v daném bodě je $x=y=z=\frac{a}{6}$ a $f=\frac{a^6}{6^6}$. Jde o jediný bod podezřelý z extrému, ve kterém vychází kladná hodnota. Jde tedy o supremum, jež jsme hledali. Máme tedy, že $\sup_M f = \sup\left\{xy^2z^3 \colon x\in(0,a), y\in\left(0,\frac{a}{2}\right), z=\frac{a-x-2y}{3}\right\} = \left(\frac{a}{6}\right)$.

Funkce f nenabývá na množině M minima, neb nám nevyšel žádný další bod podezřelý z extrému.

Příklad 1 (f) $f(x,y)=x^2+y$ a $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2; 4y^3-4y+x^2=0, y\geq 0\}$

Zadefinujme $g(x,y):=4y^3-4y+x^2$. Pak $M=[g=0]\cap[y\geq 0]$.

Všimněme si, že M je kompaktní: Aby $x^2=4y-4y^3\geq 0$, musí platit, že $y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ (uvažujeme-li jen body z M). Tedy platí, že $M=[g=0]\cap\left[y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\right]$. Dle teorie z 2. cvičení je M kompaktní. Dle věty 14 dostáváme, že f jakožto spojitá funkce nabývá na M extrémů. Nalezněme tedy její lokální minima a maxima. Pak největší a nejmenší nám dají globální maxima a minima.

Použijeme větu 24. Pro $G=[y>0]$ můžeme použít větu 24 (je potřeba, aby G byla ot.). Navíc vyšetříme chování funkce f na $[g=0]\cap[y=0]$: pokud $y=0, [x,y]\in M$, pak $x=0$. K podezřelým bodům tedy zařadíme ještě počátek.

$$g'_x(x,y) = 2x$$
$$g'_y(x,y) = 12y^2-4$$

Platí následující.

$$\nabla g = 0 \iff 2x=0=12y^2-4 \iff x=0, y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dostáváme pozezřelý bod: $\left[0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ (neb $y>0$ dle volby G).

K vyšetření podmínky *(II)* spočtěme parciální derivace f.

$$f'_x(x,y) = 2x$$
$$f'_y(x,y) = 1$$

Rovnice $\nabla f+\lambda\nabla g=0$ dává následující soustavu.

$$2x+2\lambda x = 0$$
$$1+\lambda\left(12y^2-4\right)=0$$

Jejím vyřešením dostáváme za podmínky $[x, y] \in M$:

$$\lambda = -1 \implies y = \sqrt{\frac{5}{12}}, x = \pm 2\sqrt{y - y^3} = \pm 2\sqrt{\sqrt{\frac{5}{12}} - \left(\sqrt{\frac{5}{12}}\right)^3} = \pm\sqrt{\frac{7}{3}\sqrt{\frac{5}{12}}}$$

$$x = 0, 12y^2 - 4 \neq 0 \implies 4y^3 - 4y = 0 \implies y = 0 \vee y = 1$$

Celkově podezřelými body jsou: $\left[\pm\sqrt{\frac{7}{3}\sqrt{\frac{5}{12}}}, \sqrt{\frac{5}{12}}\right], [0, 0], [0, 1], \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Vyšetřeme hodnoty funkce f v uvedených bodech. Pak největší hodnota nám dá maximum a nejmenší minimum.

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{7}{3}\sqrt{\frac{5}{12}}}, \sqrt{\frac{5}{12}}\right) = \frac{7}{3}\sqrt{\frac{5}{12}} + \sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{12}}$$

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 1) = 1$$

$$f\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Zřejmě $\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{12}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Tedy maximum: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ v $\left[\pm\sqrt{\frac{7}{3}\sqrt{\frac{5}{12}}}, \sqrt{\frac{5}{12}}\right]$ a minimum: 0 v $[0, 0]$.